Homework for Real Analysis(III)

Zhenyi Zhang*

School of Mathematical Sciences, Peking University

November 16, 2023

2. 利用 Riesz 引理取一个子列几乎处处收敛, 那么极限唯一即得.

3. 由 Lusin 定理 (周民强 P121 推论 3.10) 故可以拿连续函数逼近一个可测函数, 连续函数又可以被多项式函数逼近, 即得.(注: 第三题直接用 $m(E-F_n)<1/\epsilon$ 推出几乎处处收敛是错的 (因为在趋于无穷的过程中可能会有无数个 F_n 不包含 x))

4. 对 $n=1,2\ldots$ 记

$$\Gamma_n=\{\alpha : m\left([-n,n]\cap X_\alpha\right)>0\}.$$

只需证明 Γ_n 是可数, 这是因为

$$\{\alpha : m\left(X_\alpha\right)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Gamma_n.$$

要证明 Γ_n 可数只需证明 $\{\alpha : m\left([-n,n]\cap X_\alpha\right)>1/k\}$ 有限 (原因与刚刚类似). 而这个有限是因为

$$m([-n,n])\geq m(\cup_{i=1}^{m}[-n,n]\cap X_\alpha)=\sum_{i=1}^{m}m([-n,n]\cap X_i)\geq m/k \tag{1}$$

所以 m 至多有限不然矛盾.

6. 任意开集上积分都为 0, 可以推出任意闭集的积分也为 0, 再由 Borel 集和可测集的关系可以推出任意可测集积分为 0. 考虑 $E_+=\{x\in[a,b]:f(x)>0\}$ 和 $E_-=\{x\in[a,b]:f(x)<0\}$, 由 $\int_{E_+}f=0$ 我们可以推出 $m(E_+)=0$ 同理对 $m(E_-)=0$, 故 $f=0$ 几乎处处成立.

10.

*Email: zhenyizhang@stu.pku.edu.cn

证明. 1) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} f^{-1}\left(\left(2^k, 2^{k+1}\right]\right) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(2^k, 2^{k+1}\right]\right) = \{f(x) > 0\}$.

2) 证明相互夹就可以了

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{F_k} f(x)dx \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m\left(F_k\right) \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{F_k} f(x)dx = \int f(x)dx
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m\left(F_k\right) &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m\left(E_{2^k}\right) \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\left(\sum_{n=k}^{\infty} m\left(F_n\right)\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k m\left(F_n\right)\right) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n m\left(F_n\right)
\end{aligned}
$$

□

12. 两边分别考虑一个不等式

证明.

$$
\begin{aligned}
\int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|} = \int_{E\cap|f-g|>\epsilon}\frac{|f-g|}{1+|f-g|} + \int_{E\cap|f-g|\leq\epsilon}\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \\
\leq m(|f-g|>\epsilon) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}m(E)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

以及 (切比雪夫不等式)

$$
\frac{\epsilon}{1+\epsilon}m(|f-g|>\epsilon) \leq \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \tag{3}
$$

类似可以考虑在该题条件下, 几乎处处收敛是否可以度量化? (不可以, 为什么?) □

16. 这个证明思想比较重要: 即先证明对阶梯函数成立, 再由稠密性推广到所有可积函数上去. 有人在 16 题上用 Riemann 积分的中值定理, 这对 Lebesgue 积分是不成立的

(Riemann-Lebesgue) 设 $f\in L(\mathbb{R})$, 且 $i\in\mathbb{C}$ 为虚数单位. 定义一个新的, 与 f 有关的的函数 $\hat{f}$ 如下

$$\hat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x,\xi\in\mathbb{R}.$$

它的定义域为 $\mathbb{R}$, 值域含于 $\mathbb{C}$. 称这样定义出来的 $\hat{f}$ 为可积函数 f 的 Fourier 变换. Fourier 变换把一个函数变成另一个函数, 且这样的定义是有意义的 (即, $\hat{f}$ 几乎处处有限). Riemann-Lebesgue 引理的内容就是

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0.$$

证明. 我们只证明对任意可积函数 f, 因为具有紧支集的阶梯函数在可积函数中稠密. 因此, 我们考虑先对阶梯函数 g 证明 (2.3), 又由阶梯函数的定义, 它是有限个矩体上特征函数的线性组合, 而一维矩体就是区间, 所以我们将问题简化为先证明对 $h(x)=\chi_{(a,b)}(x)$ 去证明

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{h}(\xi)=0$$

成立. 上式等价于

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\int_a^b e^{-ix\xi}\mathrm{d}x=0.$$

通过数学分析知识 (积分换元) 以及等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 易知上式成立. 因此, 由稠密性, 即, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在相应的一个具有紧支集的阶梯函数 g 使得

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

由前面的分析, 知

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{g}(\xi)=0.$$

因此对上述 ε, 存在 $N>0$ 使得对一切 $|\xi|>N$ 都有 $|\hat{g}(\xi)|<\varepsilon$. 从而当 $|\xi|>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)|\leq|\hat{f}(\xi)-\hat{g}(\xi)|+|\hat{g}(\xi)|&=\left|\int_{\mathbb{R}}(f(x)-g(x))e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\right|+|\hat{g}(\xi)|\\&\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+|\hat{g}(\xi)|\\&\leq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了命题, 其中利用了事实 $\left|e^{-ix\xi}\right|\equiv 1$. 注: 把 $f\in L(\mathbb{R})$ 改成 $f\in L\left(\mathbb{R}^n\right)$ 也对.

□

17. 这个结论可以推广到一般得 L^p 空间, 设 E 可测，则：当 $1 \le p < \infty$ 时，$L^p(E)$ 可分；当 $p = \infty$ 时，$L^\infty(E)$ 不可分. 首先把周民强书 163 页定理 4.18 的证明推广一下, 可以证明具有紧支集的简单函数在 $L^p(E)$ 中稠密, 再考虑有理数即可 (见周民强 P260 页的证明). $L^\infty(E)$ 不可分利用反证法 (考虑函数族 $f_t(x) = \chi_{(0,t)}(x), 0 < t < 1$).

18. 此即为周民强书 P153 页例 9(利用 Tonelli 定理即得)

19. 设 $1 \le p < \infty, f(x)$ 在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测, 则

$$\int_E |f(x)|^p \ \mathrm{d}x = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\mathrm{d}\lambda.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \ \mathrm{d}x &= \int_E \left(\int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} \ \mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_E \left(\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \left(\int_E p\lambda^{p-1}\chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left(\int_E \chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

又

$$\int_E \chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)\mathrm{d}x = \int_{\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}} 1 \ \mathrm{d}x = m\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\mathrm{d}\lambda.$$

这就证明了

$$\int_E |f(x)|^p \ \mathrm{d}x = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}\mathrm{d}\lambda.$$

□