实变函数第一次作业总结

张振毅

6. 基本上有两种思路（一种使用有限覆盖定理证明，另外一种使用中值定理和介值定理证明）注：使用 Newton-Leibniz 公式需要注意使用条件，即 f 绝对连续

7. 大部分同学都是先证明代数数可数，再说明超越数不可数，但是需要注意代数数不一定都是实数 (x^2 + 1 = 0), 且超越数也有复数. 所以证明代数数可数以后, 为了证明超越数不可数, 要考虑 C\K, 其中 K = {k1,k2,...} 表示代数数.

9. 大家的构造方法很多，这里给出一种构造方法，先考虑有界闭集，使用有限覆盖定理构造，之后再考虑闭集

10. 基本上有两种思路，但是有需要注意的如下：

证明 方法一 (拓扑). 反证法. 若 F 不含孤立点, 则 $F \subset F'$, 又 $F = \{x_1, x_2, \dots\}$, 则

$$\overline{F\backslash\{x_j\}} = F,\ \forall j \in \mathbb{N}.$$

从而

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(F\backslash\{x_j\}\right)} = F. \tag{3.0.1}$$

但是 $\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(F\backslash\{x_j\}\right) = \emptyset$, 矛盾.

注意: 其中 (3.0.1) 一步不是显然的. 即 A_n 在 B 中稠未必能推出 $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_n$ 在 B 中稠, 但这里是可以, 本质上是因为这个题目中 F 是闭集, 由课本 P44 例 14 (其中 $\mathbb{R}^n$ 可改成任意**完备度量空间**), 此题中 F 是闭集故可看成完备度量空间, 定义其上的拓扑:

$$\mathscr{F} := \left\{U \cap F \,|\, U \text{ 为} \mathbb{R}^n \text{ 中的开集}\right\}.$$

因此对任意 $j \in \mathbb{N}$, $F\backslash\{x_j\}$ 是 F 中的开集. 从而由例 14 可得 (3.0.1).

方法二. 反证, 若 $F \subset F'$, 则设 $F = \{x_1, x_2, ...\}$, 则

(1) 对于 x_1, 作 $\overline{B(x_1, \delta_1)}$, 由 $x_1 \in F'$, 知存在 $x_j \in B(x_1, \delta_1)$, 选取这样下标最小的 j, 记为 y_2, 作 $\overline{B(y_2, \delta_2)} \subset B(x_1, \delta_1)$, 且保证

   1. $x_1 \notin \overline{B(y_2, \delta_2)}$.

   2. $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$, 这是可以做到的, 只需 $y_2 \neq x_1$.

(2) 重复上面的步骤, 第 $k-1$ 步, 得到满足条件的 y_k.

(3) 一直进行下去, 得到一列闭球 $\left\{\overline{B(y_n, \delta_n)}\right\}$ 且 $\delta_n \to 0$, 由闭集套定理,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(y_n, \delta_n)} \neq \emptyset.$$

设 $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(y_n, \delta_n)}$. 易证, $a \in F$, 但 $a \neq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 矛盾. □

另：有些同学写证明的时候用三个点表示“因为”“所以”，但是一般在论文或者教科书里面写证明时我们不会用这个记号，建议大家书写规范。还有些同学证明写的非常简略，只有几句话，希望之后可以将过程写的详细一些。